



Universität
Zürich ^{UZH}

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik I

Frühjahrssemester 2019

Vorlesung 3

Prof. Dr. Katia Saporiti

Vorlesung (Termine) korrigiert



	04.03.19 Folgerung	01.04.19 Aussagenlogik	
	11.03.19 Aussagen & Sätze	08.04.19 Sechseläuten	06.05.19 Prädikatenlogik
18.02.19 Einführung	18.03.19 entfällt!	15.04.19 Aussagenlogik	13.05.19 Prädikatenlogik
25.02.19 Was ist Logik?	25.03.19 Wahrheitsfunktionalität	22.04.2019 Osterferien	20.05.19 Prädikatenlogik
		29.04.19 Aussagenlogik	27.05.19 Klausur

Eigenschaften der Folgerungsbeziehung

- I. Logik als Lehre von der Widerspruchsfreiheit von Aussagen
- II. Tautologien und Kontradiktionen
- III. Aus einem Widerspruch folgt Beliebiges – *ex falso (sequitur) quodlibet*
- IV. Eine Tautologie folgt aus Beliebigem – *verum (sequitur) ex quodlibet*
- V. Die Folgerungsbeziehung ist reflexiv
- VI. Die Folgerungsbeziehung ist transitiv
- VII. Die Folgerungsbeziehung ist weder symmetrisch noch asymmetrisch
- VIII. Reflexivität, Transitivität & Symmetrie binärer Relationen

I. Logik als Lehre von der Widerspruchsfreiheit von Aussagen

- Wenn A aus A_1 bis A_n folgt, kann es nicht sein, dass A_1 bis A_n zutreffen und A nicht zutrifft.

Wer behauptet, dass A_1 bis A_n richtig sind, A aber falsch ist, der verwickelt sich in einen Widerspruch.

Die Menge der Aussagen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ und Nicht- A ist inkonsistent.

Wenn unser Schluss ein gültiger Schluss ist, dann ist $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \text{Nicht-}A\}$ inkonsistent.

- **Die Prämissen eines gültigen Schlusses bilden zusammen mit der Negation seiner Konklusion eine inkonsistente Menge von Aussagen.**

- Logik lässt sich deshalb auch als Lehre von der Widerspruchsfreiheit von Aussagen charakterisieren.

 A_1 A_2 A_3

·

·

·

 A_n

 A

Gültige Schlüsse und inkonsistente Aussagen

- (1) Alle Berliner sind redselig.
Max ist ein Berliner
 Max ist redselig.

$M = \{ \text{Alle Berliner sind redselig,} \\ \text{Max ist ein Berliner,} \\ \text{Max ist nicht redselig} \}$

(1) ist gültig



M ist inkonsistent



(2*)
 Marlene quasselt und quasselt.
Marlene hat keine gute Laune.
 Marlene quasselt und quasselt
 nicht nur, wenn sie gut gelaunt ist.

- (2) Marlene quasselt und quasselt.
Das tut sie nur, wenn sie gut gelaunt ist.
 Marlene hat gute Laune.

$M' = \{ \text{Marlene quasselt und quasselt,} \\ \text{das tut sie nur, wenn sie gut gelaunt ist,} \\ \text{Marlene hat keine gute Laune} \}$

(2) ist gültig



M' ist inkonsistent



(2**) Marlene quasselt und quasselt
 nur, wenn sie gut gelaunt ist.
Marlene hat keine gute Laune.
 Es ist nicht der Fall, dass
 Marlene quasselt und quasselt.

(1*)
 Alle Berliner sind redselig.
Max ist nicht redselig.
 Max ist kein Berliner.

(1**) Max ist ein Berliner.
Max ist nicht redselig.
 Nicht alle Berliner sind redselig.

II. Kontradiktionen & Tautologie: Kontradiktionen

Eine Aussage, die in sich widersprüchlich ist und daher niemals wahr sein kann, nennt man eine **Kontradiktion**.

Beispiele:

- (1) Karl ist ein verheirateter Junggeselle.
- (2) Isabelle ist klug und dumm.
- (3) Dunkel war's, der Mond schien helle.
- (4) Der Apfel ist ganz und gar grün und der Apfel ist rot.
- (5) Ich bin nicht hier.
- (6) Ottos Hamster ist tot und Ottos Hamster lebt.
- (7) Es regnet und es regnet nicht.*
- (8) Jeder Bauer besitzt mindestens ein Huhn und manche Bauern besitzen keine Hühner.*
- (9) Alle Politiker lügen, aber es gibt Politiker, die nicht lügen.*
- (10) Otto lügt niemals und Otto lügt manchmal.*

*(formale Kontradiktion)

Tautologien

Eine Aussage, die wahr sein muss (nicht falsch sein kann), nennt man eine **Tautologie**.

Beispiele:

- (1) Entweder ist sie schwanger oder sie ist es nicht. *
- (2) Wenn er nicht will, dann will er nicht. *

- Wenn man eine Tautologie verneint, erhält man eine Kontradiktion. (Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion.)
- Wenn man eine Kontradiktion verneint, erhält man eine Tautologie. (Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie.)
 - Karl ist ein verheirateter Junggeselle. Karl ist kein verheirateter Junggeselle.
 - Ottos Hamster ist tot und lebt. Es ist nicht der Fall, dass Ottos Hamster tot ist und lebt.
 - Es regnet und es regnet nicht. Es ist nicht der Fall, dass es regnet und nicht regnet. *

* (formale Tautologien)

III. *Ex falso (sequitur) quodlibet*

- Aus einem Widerspruch – aus logisch Falschem – folgt Beliebiges.
Aus inkonsistenten Prämissen folgt jede beliebige Konklusion.



- (1) Elvis lebt.
Elvis lebt nicht, sondern ist tot.
Logik ist unlogisch.
- (1) ist ein gültiger Schluss, denn es kann nicht sein, dass seine Prämissen wahr sind und seine Konklusion gleichzeitig falsch ist.
 - (2) Es regnet und es regnet nicht.
Karlchen kann fliegen.
- (2) ist ein gültiger Schluss. Auch aus einer Kontradiktion als Prämisse folgt jede beliebige Konklusion. Ein Schluss mit einer Kontradiktion als Prämisse ist in jedem Fall gültig.

... ex falso quodlibet (Fortsetzung)

(3) Nicht-A und B
A oder nicht-B
 Also C

(3) ist ein Schema eines gültigen Schlusses
 (inkonsistente Prämissen).

(4) nicht-A und B
A oder nicht-B
 C und nicht-C

(4) ist ein Schema eines gültigen Schlusses
 (inkonsistente Prämissen; die Konklusion ist eine
 Kontradiktion).

(5) Der Baum ist belaubt und er ist es nicht.
Die Hecke ist dicht belaubt.
 Der Gärtner war der Mörder.

(5) ist ein gültiger Schluss (die erste Prämisse ist
 eine Kontradiktion).

- Aus inkonsistenten Prämissen (oder aus einer Kontradiktion als Prämisse) folgt jede beliebige Konklusion – sogar eine Kontradiktion.
- Eine Kontradiktion kann nur aus inkonsistenten Prämissen (oder einer Kontradiktion als Prämisse) folgen.

IV. Verum sequitur ex quodlibet

- Logisch Wahres folgt aus Beliebigem.
 Was wahr sein muss (nicht falsch sein kann), folgt aus beliebigen Prämissen.
 Tautologien folgen aus beliebigen Prämissen.
 Jeder Schluss, dessen Konklusion eine Tautologie ist, ist gültig.



(6) Gras ist lila.
Schafe sind nette Tiere.
 Es schneit oder es schneit nicht.

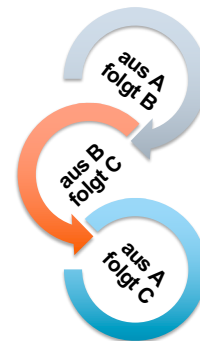
- (6) ist ein gültiger Schluss, denn es kann nicht sein, dass seine Prämissen wahr sind und seine Konklusion gleichzeitig falsch ist.

V. Die Folgerungsbeziehung ist reflexiv

- Jede Aussage folgt aus sich selbst.*
 - (7) Jean ist immer für einen Witz gut.
Jean ist immer für einen Witz gut.
 - (8) Hans im Glück kann sein Glück nicht verspielen.
Hans im Glück kann sein Glück nicht verspielen.
 - Ein Schluss von einer Aussage A auf die Aussage A ist gültig, weil es nicht sein kann, dass seine Prämisse wahr, seine Konklusion gleichzeitig aber falsch ist.
 - (9) $\frac{A}{A}$
 - (7) und (8) sind gültige Schlüsse, (9) ist ein gültiges Schlusschema.
- * (Ob jede Aussage aus *formalen* Gründen aus sich selbst folgt, ist – ein wenig – umstritten. Wir gehen hier davon aus, dass jede Aussage auch aus formalen Gründen aus sich selbst folgt.)

VI. Die Folgerungsbeziehung ist transitiv

- Wenn B aus A folgt und C aus B folgt, dann folgt C auch aus A.
 - Wenn es nicht sein kann, dass A wahr, B aber falsch ist, und es auch nicht sein kann, dass B wahr, gleichzeitig aber C falsch ist, dann kann es auch nicht sein, dass A wahr, aber C falsch ist.
- (A) Karl ist fünf Jahre alt, kann schon bis 100 zählen und ist schlau.
(B) Karl ist fünf Jahre alt und kann schon bis 100 zählen.
- (B) Karl ist fünf Jahre alt und kann schon bis 100 zählen.
(C) Karl ist fünf Jahre alt.
- (A) Karl ist fünf Jahre alt, kann schon bis 100 zählen und ist schlau.
(C) Karl ist fünf Jahre alt.



VII. Die Folgerungsbeziehung ist weder symmetrisch noch asymmetrisch

- Die Folgerungsbeziehung ist nicht symmetrisch.

Es ist möglich, dass A aus B folgt, B aber nicht aus A folgt.

Bsp.: Daraus, dass weiße Pferde im Stall stehen, folgt, dass Pferde im Stall stehen. Aber daraus, dass Pferde im Stall stehen, folgt nicht, dass weiße Pferde im Stall stehen.

- Die Folgerungsbeziehung ist nicht asymmetrisch.

Es ist möglich, dass A aus B folgt und B aus A folgt.

Bsp.: Daraus, dass einige Pferde im Stall stehen, die nicht weiß sind, folgt, dass nicht alle Pferde, die im Stall stehen, weiß sind. Und daraus, dass nicht alle Pferde, die im Stall stehen, weiß sind, folgt, dass einige Pferde im Stall stehen, die nicht weiß sind.

VIII. Reflexivität, Transitivität & Symmetrie binärer Relationen: Reflexivität und Irreflexivität

- Eine Beziehung ist genau dann **reflexiv**, wenn jedes Ding zu sich selbst in dieser Beziehung steht. (Dies gilt z.B. für die Beziehung „ist gleich gross wie“.) *
- Eine Beziehung ist genau dann **irreflexiv**, wenn kein Ding zu sich selbst in dieser Beziehung steht. (Dies gilt z.B. für die Beziehung „ist kleiner als“.) *
- Demnach bedeutet „irreflexiv“ nicht dasselbe wie „nicht reflexiv“.
- Es ist nicht möglich, dass eine Beziehung sowohl reflexiv als auch irreflexiv ist. Aber es ist durchaus möglich, dass eine Beziehung weder reflexiv noch irreflexiv ist. (Letzteres gilt z.B. für die Beziehung „... liebt ...“. Nicht jeder liebt sich selbst, gleichzeitig ist es aber nicht ausgeschlossen, dass jemand sich selbst liebt.)
- Reflexivität und Irreflexivität sind konträre, aber nicht kontradiktorische Gegensätze.

** (Gemeint sind hier jeweils alle Dinge (bzw. keines der Dinge), die überhaupt zu irgendetwas in der fraglichen Beziehung stehen können.)*

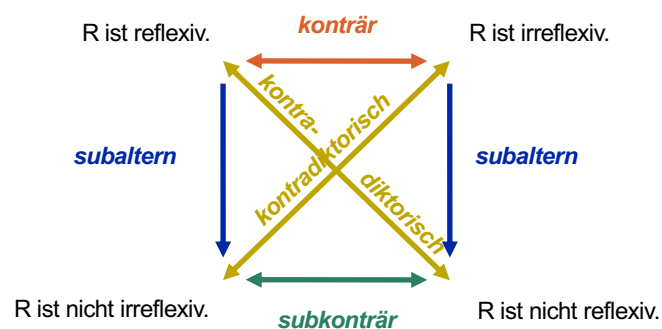
Konträre und kontradiktorische Gegensätze im logischen Quadrat

Subaltern: Aus Aussagen folgen ihre subalternen Aussagen, aber nicht umgekehrt.

Konträr: Zwei konträre Aussagen können nicht beide wahr sein, aber sie können beide falsch sein.

Subkonträr: Zwei subkonträre Aussagen können nicht beide falsch sein, aber sie können beide wahr sein.

Kontradiktorisch: Von zwei kontradiktorischen Aussagen ist immer genau eine wahr (die andere falsch).



Transitivität und Intransitivität

- Eine Beziehung ist genau dann **transitiv**, wenn, falls α in dieser Beziehung zu β steht und β in dieser Beziehung zu γ steht, dann auch α in dieser Beziehung zu γ steht.

(Dies gilt z.B. für die Beziehungen „ist grösser als“ und „ist jünger als“.)

- Eine Beziehung ist genau dann **intransitiv**, wenn, falls α in dieser Beziehung zu β steht und β in dieser Beziehung zu γ steht, dann α nicht in dieser Beziehung zu γ steht.

(Dies gilt z.B. für die Beziehung „ist Vater von“)

- Demnach bedeutet „intransitiv“ nicht dasselbe wie „nicht transitiv“.
- Es ist nicht möglich, dass eine Beziehung sowohl transitiv als auch intransitiv ist. Aber es ist durchaus möglich, dass eine Beziehung weder transitiv noch intransitiv ist.

(Letzteres gilt z.B. für die Beziehung „... kennt ...“. Nur weil Otto Karla kennt und Karla Heinz kennt, muss Otto Heinz noch lange nicht kennen. Aber natürlich ist es möglich, dass Otto Heinz kennt.)

- Transitivität und Intransitivität sind konträre, aber nicht kontradiktorische Gegensätze.

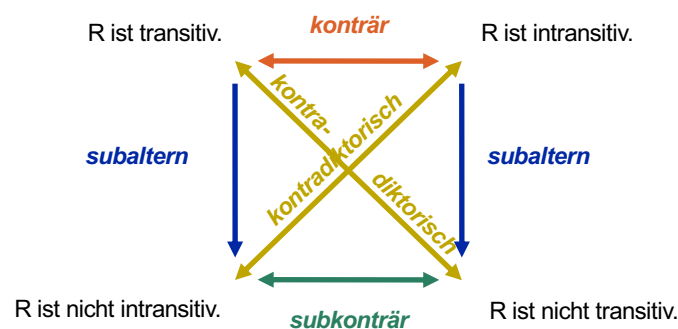
Konträre und kontradiktorische Gegensätze im logischen Quadrat

Subaltern: Aus Aussagen folgen ihre subalternen Aussagen, aber nicht umgekehrt.

Konträr: Zwei konträre Aussagen können nicht beide wahr sein, aber sie können beide falsch sein.

Subkonträr: Zwei subkonträre Aussagen können nicht beide falsch sein, aber sie können beide wahr sein.

Kontradiktorisch: Von zwei kontradiktorischen Aussagen ist immer genau eine wahr (die andere falsch).



Symmetrie und Asymmetrie

- Eine Beziehung ist genau dann **symmetrisch**, wenn falls α in dieser Beziehung zu β steht, dann auch β in dieser Beziehung zu α steht.

(Dies gilt z.B. für die Beziehung „ist verwandt mit“.)

- Eine Beziehung ist genau dann **asymmetrisch**, wenn falls α in dieser Beziehung zu β steht, dann β nicht in dieser Beziehung zu α steht.

(Dies gilt z.B. für die Beziehung „ist kleiner als“.)

- Demnach bedeutet „asymmetrisch“ nicht dasselbe wie „nicht symmetrisch“.
- Es ist nicht möglich, dass eine Beziehung symmetrisch und asymmetrisch ist. Aber es ist durchaus möglich, dass eine Beziehung keins von beiden ist.
(Letzteres gilt z.B. für die Beziehung „... liebt ...“. Es gibt sowohl erwiderte als auch unerwiderte Liebe.)
- Symmetrie und Asymmetrie sind konträre, aber nicht kontradiktorische Gegensätze.

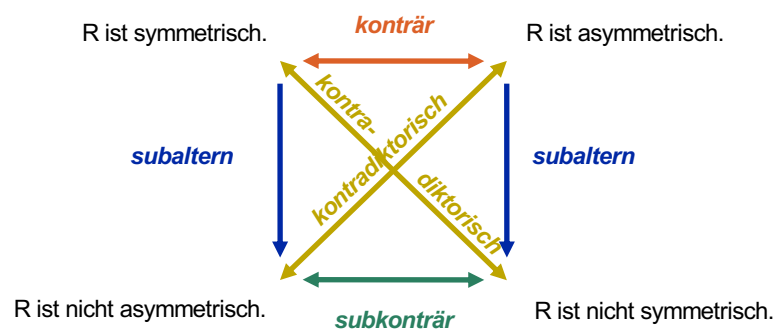
Konträre und kontradiktorische Gegensätze im logischen Quadrat

Subaltern: Aus Aussagen folgen ihre subalternen Aussagen, aber nicht umgekehrt.

Konträr: Zwei konträre Aussagen können nicht beide wahr sein, aber sie können beide falsch sein.

Subkonträr: Zwei subkonträre Aussagen können nicht beide falsch sein, aber sie können beide wahr sein.

Kontradiktorisch: Von zwei kontradiktorischen Aussagen ist immer genau eine wahr (die andere falsch).



Reflexivität, Transitivität & Symmetrie binärer Relationen (Übersicht)

- Eine Relation R ist *reflexiv* gdw. jedes Ding zu sich selbst in dieser Relation steht. (z.B. „ist identisch mit“, „ist gleich gross wie“)
- Eine Relation R ist *irreflexiv* gdw. kein Ding zu sich selbst in dieser Relation steht. (z.B. „ist grösser als“, „ist jünger als“)
- Eine Relation R ist *transitiv* gdw. wenn α in R zu β steht und β in R zu γ steht, α in R zu γ steht. (z.B. „ist grösser als“, „ist jünger als“)
- Eine Relation ist *intransitiv* gdw. wenn α in R zu β steht und β in R zu γ steht, α nicht in R zu γ steht. (z.B. „ist Vater von“)
- Eine Relation ist *symmetrisch* gdw. wenn α in R zu β steht, β in R zu α steht. (z.B. „ist verwandt mit“)
- Eine Relation ist *asymmetrisch* gdw. wenn α in R zu β steht, β nicht in R zu α steht. (z.B. „ist bekannter als“)

- Eine **reflexive** Relation (Beziehung) kann nicht irreflexiv sein und eine irreflexive Relation kann nicht reflexiv sein.
- Aber eine Relation kann durchaus weder reflexiv noch irreflexiv sein. (z.B. „x gefällt y“)
- Reflexiv zu sein und irreflexiv zu sein sind konträre Eigenschaften. Sie schliessen einander aus. Aber sie sind einander nicht kontradiktorisch entgegengesetzt. Nicht jede Relation muss überhaupt eine der beiden Eigenschaften aufweisen.
- Eine **transitive** Relation kann nicht intransitiv sein und eine intransitive Relation kann nicht transitiv sein.
- Aber eine Relation kann durchaus weder transitiv noch intransitiv sein. (z.B. „x kennt y“)
- Transitiv zu sein und intransitiv zu sein sind konträre (einander ausschliessende) aber nicht kontradiktorische Eigenschaften. Nicht jede Relation muss überhaupt eine der beiden Eigenschaften aufweisen.
- Eine **symmetrische** Relation kann nicht asymmetrisch sein und eine asymmetrische Relation kann nicht symmetrisch sein.
- Aber eine Relation kann durchaus weder symmetrisch noch asymmetrisch sein. (z.B. „x liebt y“)
- Symmetrisch zu sein und asymmetrisch zu sein sind konträre (einander ausschliessende) aber nicht kontradiktorische Eigenschaften. Nicht jede Relation muss überhaupt eine der beiden Eigenschaften aufweisen.

Fin